

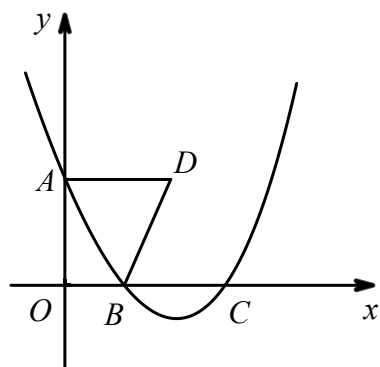
## 第2讲二次函数与线段和差最值

### 一、单线段的最值

#### 1. 一定一动

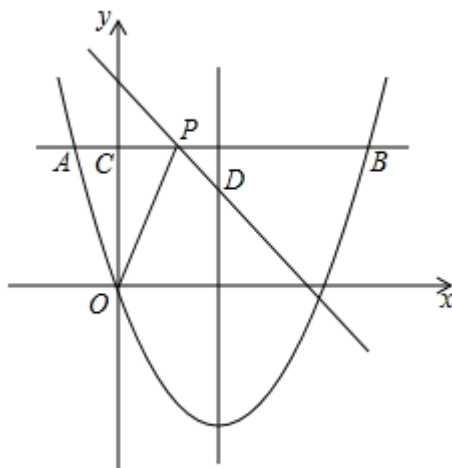
##### 典题精炼

1. 如图，在平面直角坐标系中，点 $A$ 是 $y$ 轴正半轴上的一动点，抛物线 $y = mx^2 - 5mx + 4m$  ( $m$ 是常数，且 $m > 0$ ) 过点 $A$ ，与 $x$ 轴交于 $B, C$ 两点，点 $B$ 在点 $C$ 左侧．连接 $AB$ ，以 $AB$ 为边做等边三角形 $ABD$ ，点 $D$ 与点 $O$ 在直线 $AB$ 两侧．



- ( 1 ) 求 $B, C$ 的坐标．
- ( 2 ) 完成下列各题．
- ① 求动点 $D$ 所成的图象的函数表达式．
  - ② 连接 $CD$ ，求 $CD$ 的最小值．

2. 如图，过抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x$  上一点  $A$  作  $x$  轴的平行线，交抛物线于另一点  $B$ ，交  $y$  轴于点  $C$ ，已知点  $A$  的横坐标为  $-2$ 。



- ( 1 ) 求抛物线的对称轴和点  $B$  的坐标。
- ( 2 ) 在  $AB$  上任取一点  $P$ ，连结  $OP$ ，作点  $C$  关于直线  $OP$  的对称点  $D$ 。
  - ① 连结  $BD$ ，求  $BD$  的最小值。
  - ② 当点  $D$  落在抛物线的对称轴上，且在  $x$  轴上方时，求直线  $PD$  的函数表达式。

 经典再现

3. 已知点 $A(1, 0)$ 是抛物线 $y = ax^2 + bx + m$  ( $a, b, m$ 为常数,  $a \neq 0, m < 0$ )与 $x$ 轴的一个交点.

(1) 当 $a = 1, m = -3$ 时, 求该抛物线的顶点坐标.

(2) 若抛物线与 $x$ 轴的另一个交点为 $M(m, 0)$ , 与 $y$ 轴的交点为 $C$ , 过点 $C$ 作直线 $l$ 平行于 $x$ 轴,  $E$ 是直线 $l$ 上的动点,  $F$ 是 $y$ 轴上的动点,  $EF = 2\sqrt{2}$ .

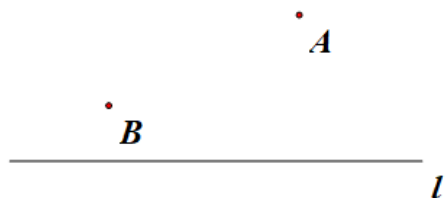
① 当点 $E$ 落在抛物线上 (不与点 $C$ 重合), 且 $AE = EF$ 时, 求点 $F$ 的坐标.

② 取 $EF$ 的中点 $N$ , 当 $m$ 为何值时,  $MN$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ?

## 二、将军饮马

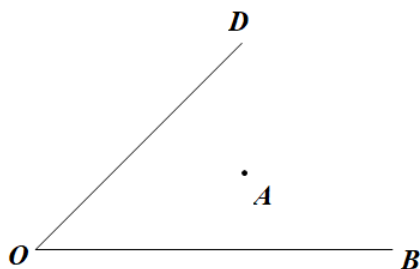
### 1. 两定一动类

如图，在 $l$ 上找一点 $P$ ，使 $PA + PB$ 最小.

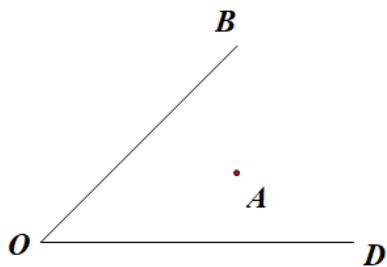


### 2. 一定两动类

1、如图，点 $A$ 在锐角 $\angle DOB$ 的内部，在 $OD$ 边上求作一点 $P$ ，在 $OB$ 边上求作一点 $Q$ ，使 $\triangle PAQ$ 的周长最小（或者使得 $PA + QA$ 最小）.

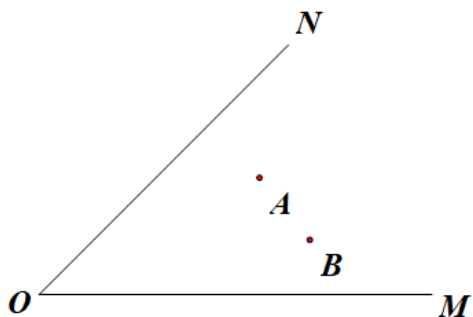


2、如图，点 $A$ 在锐角 $\angle DOB$ 的内部，在 $OD$ 边上求作一点 $P$ ，在 $OB$ 边上求作一点 $Q$ ，使得 $PQ + PA$ 最小.



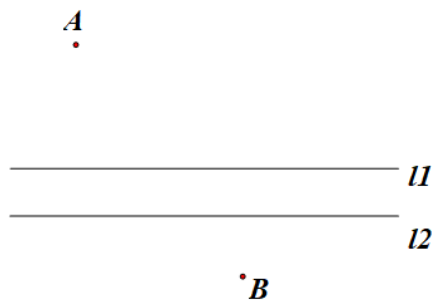
### 3. 两定两动类

如图，点 $A$ 、 $B$ 在锐角 $\angle MON$ 的内部，在 $ON$ 边上求作一点 $P$ ，在 $OM$ 边上求作一点 $Q$ ，使四边形 $ABQP$ 周长最小（或者使得 $PA + PQ + QB$ 最小）。

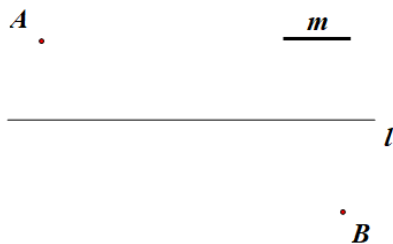


### 4. 含定长类

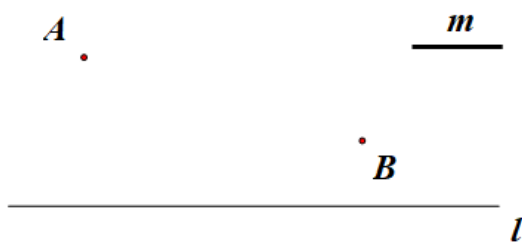
1、如图，在一组平行线 $l_1$ 、 $l_2$ 两侧各有一点 $A$ 、 $B$ ，在 $l_1$ 、 $l_2$ 间找一条线段 $MN$ ，使 $MN \perp l_1$ ，并且使得 $AM + MN + NB$ 之和最短。



2、如图，直线 $l$ 外有两点 $A$ 、 $B$ ，有一定长线段 $m$ ，在直线上找到点 $P$ 、 $Q$ ，使得 $PQ$ 间的距离等于定长 $m$ ，且使得 $AP + PQ + QB$ 最小。

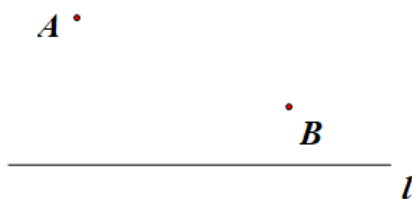


3、如图，直线  $l$  外有两点  $A$ 、 $B$ ，有一定长线段  $m$ ，在直线上找到点  $P$ 、 $Q$ ，使得  $PQ$  间的距离等于定长  $m$ ，且使得  $AP + PQ + QB$  最小（或者使得四边形  $APQB$  周长最小）。

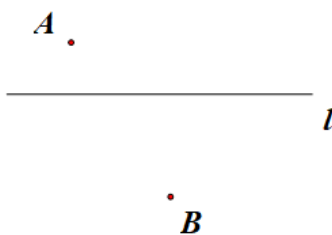


## 5. 差最小

1、如图，在  $l$  上找一点  $P$ ，使  $|PA - PB|$  最小。

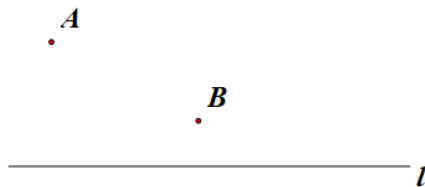


2、如图，在  $l$  上找一点  $P$ ，使  $|PA - PB|$  最小。

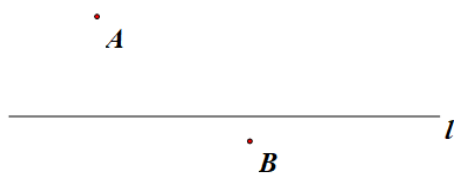


## 6. 差最大

1、如图，在  $l$  上找一点  $P$ ，使  $|PA - PB|$  最大。

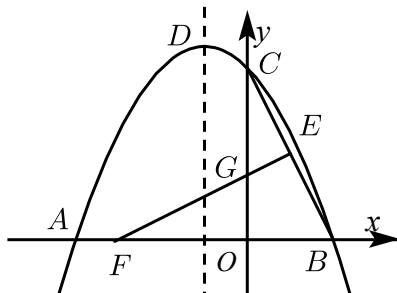


2、如图，在  $l$  上找一点  $P$ ，使  $|PA - PB|$  最大。



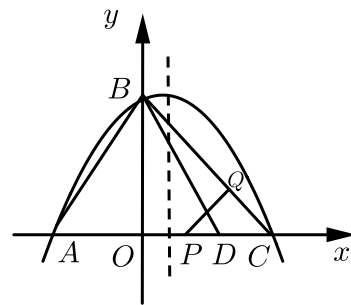
 典题精炼

4. 如图，抛物线  $y = ax^2 + bx + 4$  与  $x$  轴的两个交点分别为  $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$ ，与  $y$  轴交于点  $C$ ，顶点为  $D$ ； $E(1, 2)$  为线段  $BC$  的中点， $BC$  的垂直平分线与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于  $F$ 、 $G$ 。



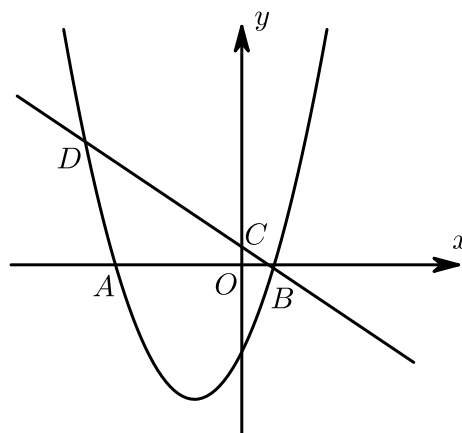
- ( 1 ) 求抛物线的函数解析式，并写出顶点  $D$  的坐标。
- ( 2 ) 在直线  $EF$  上求一点  $H$ ，使  $\triangle CDH$  的周长最小，并求出最小周长。

5. 如图，抛物线  $y = ax^2 + bx + 4 (a \neq 0)$  与  $x$  轴交于  $A(-3, 0)$ ， $C(4, 0)$  两点，与  $y$  轴交于点  $B$ 。

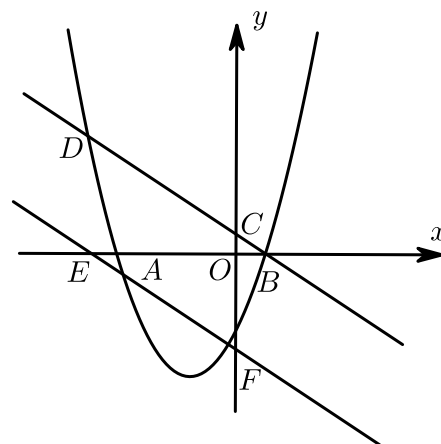


- (1) 求这条抛物线的顶点坐标。
- (2) 已知  $AD = AB$  (点  $D$  在线段  $AC$  上)，有一动点  $P$  从点  $A$  沿线段  $AC$  以每秒 1 个单位长度的速度移动；同时另一个点  $Q$  以某一速度从点  $B$  沿线段  $BC$  移动，经过  $t(s)$  的移动，线段  $PQ$  被  $BD$  垂直平分，求  $t$  的值。
- (3) 在 (2) 的情况下，抛物线的对称轴上是否存在一点  $M$ ，使  $MQ + MC$  的值最小？若存在，请求出点  $M$  的坐标；若不存在，请说明理由。

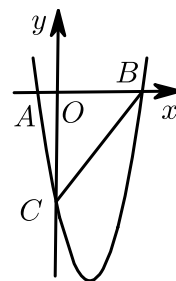
6. 如图，抛物线  $y = ax^2 + 2x + c$  与  $x$  轴交于  $A(-4, 0)$ ， $B(1, 0)$  两点，过点  $B$  的直线  $y = kx + \frac{2}{3}$  分别与  $y$  轴及抛物线交于点  $C$ ， $D$ 。



- (1) 求直线和抛物线的表达式。
- (2) 如图，将直线  $BD$  沿  $y$  轴向下平移 4 个单位后，与  $x$  轴， $y$  轴分别交于  $E$ ， $F$  两点，在抛物线的对称轴上是否存在点  $M$ ，在直线  $EF$  上是否存在点  $N$ ，使  $DM + MN$  的值最小？若存在，求出其最小值及点  $M$ ， $N$  的坐标；若不存在，请说明理由。

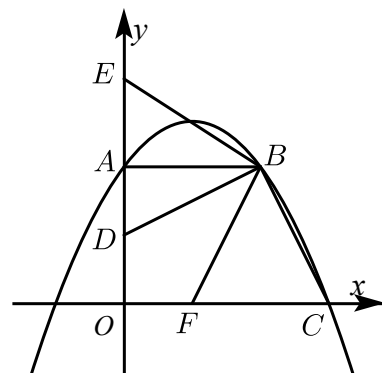


7. 如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 5$ 与 $x$ 轴交于点 $A(-1, 0)$ ， $B(5, 0)$ ，与 $y$ 轴交于点 $C$ 。



- ( 1 ) 抛物线的函数表达式为 \_\_\_\_\_ 。
- ( 2 ) 若点 $K$ 为抛物线的顶点，点 $M(4, m)$ 是该抛物线上的一点，在 $x$ 轴， $y$ 轴上分别找点 $P$ ， $Q$ ，使四边形 $PQKM$ 的周长最小，求出点 $P$ ， $Q$ 的坐标。

8. 如图，已知在平面直角坐标系 $xOy$ 中，直角梯形 $OABC$ 的边 $OA$ 在 $y$ 轴的正半轴上， $OC$ 在 $x$ 轴的正半轴上， $OA = AB = 2$ ， $OC = 3$ ，过点 $B$ 作 $BD \perp BC$ ，交 $OA$ 于点 $D$ ．将 $\angle DBC$ 绕点 $B$ 按顺时针方向旋转，角的两边分别交 $y$ 轴的正半轴、 $x$ 轴的正半轴于点 $E$ 和 $F$ ．



- ( 1 ) 求经过 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三点的抛物线的解析式．
- ( 2 ) 当 $BE$ 经过( 1 )中抛物线的顶点时，求 $CF$ 的长．
- ( 3 ) 在抛物线的对称轴上取两点 $P$ 、 $Q$  (点 $Q$ 在点 $P$ 的上方)，且 $PQ = 1$ ，要使四边形 $BCPQ$ 的周长最小，求出 $P$ 、 $Q$ 两点的坐标．

### 三、胡不归

#### 📢 教法备注

求 " $PB + nPA$ " 的最小值问题

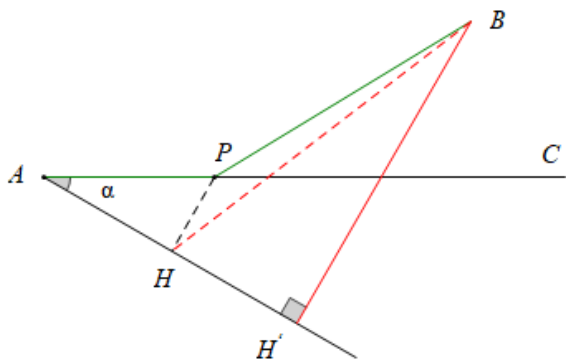
1、胡不归问题的特点：

- ①两定一动． $A$ 、 $B$ 是两个定点，点 $P$ 是一个动点；
- ②动点 $P$ 在直线上运动．

2、解题思路：

构造直角三角形，利用正弦关系转化带系数的线段．即构造 $\sin \alpha = n$ ．

点 $P$ 和点 $A$ 在同一条直线 $AC$ 上，构造的 $\alpha$ 角其实就是依托顶点 $A$ 及定直线 $AC$ 做出来的，即做一条过点 $A$ 的射线与定直线 $AC$ 所夹锐角为 $\alpha$ ．



3、特殊情况：

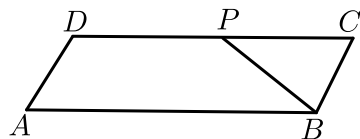
如果 $n$ 值大于1，则要先提取 $n$ ，再跟据思路2进行求解．

如： $PA + 3PB$ 的最小值转化为求 $3\left(\frac{1}{3}PA + PB\right)$   
 $2PA + 3PB$ 的最小值转化为求 $3\left(\frac{2}{3}PA + PB\right)$

#### 📢 典题精炼

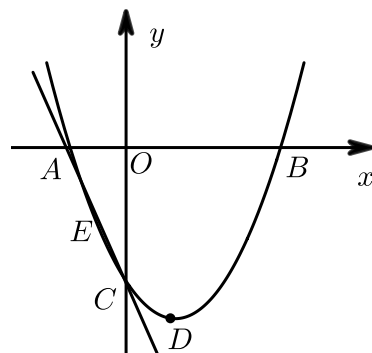
9. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 2$ ， $P$ 为边 $CD$ 上的一动点，则

$PB + \frac{\sqrt{3}}{2}PD$ 的最小值等于 \_\_\_\_\_ ．



10. 已知点 $Q\left(\frac{9}{2}, y_Q\right)$ 在二次函数 $y = x^2 - 4x - 5$ 图象上, 点 $A$ 为抛物线与 $x$ 轴的交点且位于 $x$ 轴负半轴上. 点 $M(m, 0)$ 是 $x$ 轴正半轴上的一个动点. 则 $\frac{\sqrt{2}}{2}AM + QM$ 的最小值为 \_\_\_\_\_.

11. 如图, 抛物线 $y = ax^2 - 2ax + c$ 的图象经过点 $C(0, -2)$ , 顶点 $D$ 的坐标为 $\left(1, -\frac{8}{3}\right)$ , 与 $x$ 轴交于 $A$ 、 $B$ 两点.



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 点 $F(0, y)$ 是 $y$ 轴上一动点, 当 $y$ 为何值时,  $\frac{\sqrt{5}}{5}FC + BF$ 的值最小. 并求出这个最小值.

12. 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ , 与 $x$ 轴交于两点 $A$ 、 $B$  (点 $A$ 在点 $B$ 的左侧), 与 $y$ 轴交于点 $C$ .

(1) 求点 $A$ 、 $B$ 和点 $C$ 的坐标.

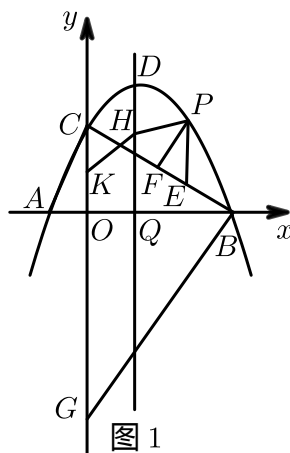
(2) 已知 $P$ 是线段 $BC$ 上的一个动点.

① 若 $PQ \perp x$ 轴, 交抛物线于点 $Q$ , 当 $BP + PQ$ 取最大值时, 求点 $P$ 的坐标.

② 求 $\sqrt{2}AP + PB$ 的最小值.

13. 在平面直角坐标系中, 抛物线  $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$  与  $x$  轴交于  $A, B$  两点 (点  $A$  在点  $B$  左侧), 与  $y$  轴交于点  $C$ , 顶点为  $D$ , 对称轴与  $x$  轴交于点  $Q$ .

- (1) 如图1, 连接  $AC, BC$ . 若点  $P$  为直线  $BC$  上方抛物线上一动点, 过点  $P$  作  $PE \parallel y$  轴交  $BC$  于点  $E$ , 作  $PF \perp BC$  于点  $F$ , 过点  $B$  作  $BG \parallel AC$  交  $y$  轴于点  $G$ . 点  $H, K$  分别在对称轴和  $y$  轴上运动, 连接  $PH, HK$ . 当  $\triangle PEF$  的周长最大时, 求  $PH + HK + \frac{\sqrt{3}}{2}KG$  的最小值及点  $H$  的坐标.



### 经典再现

14. 已知抛物线  $y = x^2 - bx + c$  ( $b, c$  为常数,  $b > 0$ ) 经过点  $A(-1, 0)$ , 点  $M(m, 0)$  是  $x$  轴正半轴上的点.
- (1) 当  $b = 2$  时, 求抛物线的顶点坐标.
- (2) 点  $D(b, y_D)$  在抛物线上, 当  $AM = AD$ ,  $m = 5$  时, 求  $b$  的值.
- (3) 点  $Q\left(b + \frac{1}{2}, y_Q\right)$  在抛物线上, 当  $\sqrt{2}AM + 2QM$  的最小值为  $\frac{33\sqrt{2}}{4}$  时, 求  $b$  的值.

## 四、阿氏圆

“ $PB + nPA$ ”的最小值问题:

1、特点:

①两定一动. 点 $A$ 、 $B$ 是定点, 点 $P$ 是动点.

②动点 $P$ 在圆周上运动.

2、解题步骤:

①连接动点 $P$ 和圆心 $O$ .

将系数不为1的线段的两个端点分别与圆心连接, 如图中的线段 $OP$ 、 $OA$ .

②计算出所连接的这两条线段的长度.

③计算这两条线段的长度比. 即  $\frac{OP}{OA} = n$ .

④在线段 $OA$ 上取点 $Q$ , 使得  $\frac{OQ}{OP} = n$ . 得到  $\triangle OPQ \sim \triangle OAP$ , 则  $PQ = n \cdot PA$ .

⑤连接 $BQ$ , 与圆交点即为当“ $PB + nPA$ ”的值最小时, 点 $P$ 的位置.

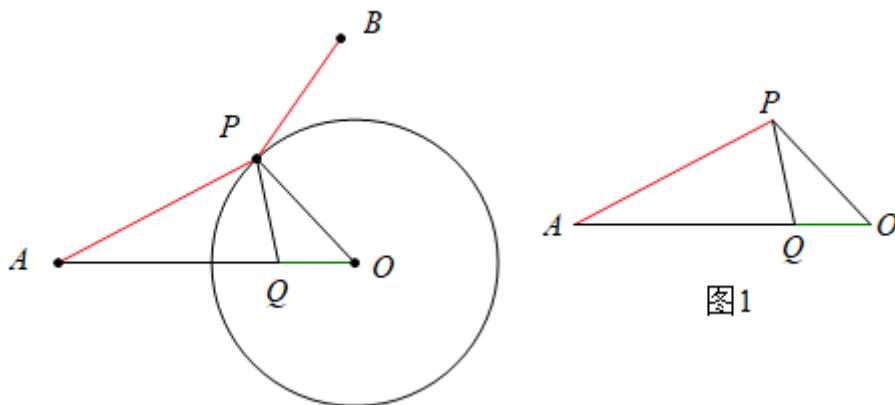


图1

3、“阿氏圆”问题本质是构造字母型相似, 如图1.

构造  $\triangle OPQ \sim \triangle OAP$ , 得  $OP^2 = OQ \cdot OA$ , 即: 半径的平方 = 构造线段  $\times$  原有线段. 所以

$PQ = n \cdot PA$ .

4、特殊情况:

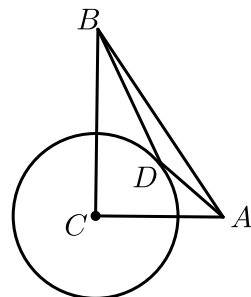
如果 $n$ 值大于1, 则要先提取 $n$ , 再跟据思路2进行求解.

如:  $PA + 3PB$ 的最小值转化为求  $3\left(\frac{1}{3}PA + PB\right)$

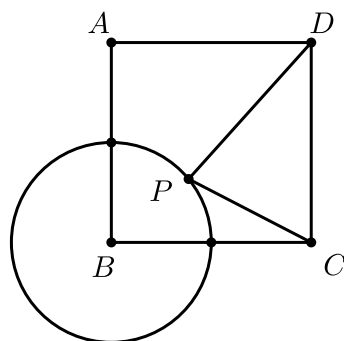
求  $2PA + 3PB$ 的最小值转化为求  $2PA + 3PB = 3\left(\frac{2}{3}PA + PB\right)$

 典题精练1

15. 如图，已知 $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， $AB = 10$ ，以点 $C$ 为圆心，4为半径作圆．点 $D$ 是 $\odot C$ 上的个动点，连接 $AD$ 、 $BD$ ，则 $AD + \frac{1}{2}BD$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ ．

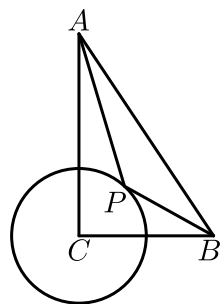


16. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为4， $\odot B$ 的半径为2， $P$ 为 $\odot B$ 上的动点，求 $\frac{1}{2}PC + PD$ 的最小值．



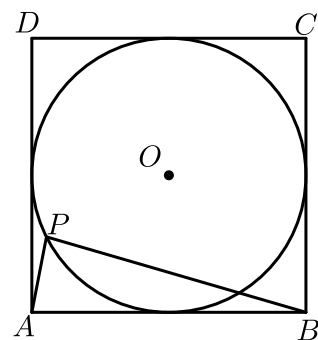
 典题精练2

17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CB = 4$ ， $CA = 6$ ， $\odot C$ 半径为2， $P$ 为圆上一动点，连接 $AP$ ， $BP$ ，则 $2AP + BP$ 的最小值为（ ）．

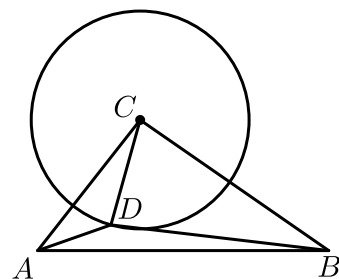


- A.  $2\sqrt{37}$       B. 12      C.  $4\sqrt{17} - 2$       D. 8

18. 如图，边长为4的正方形，内切圆记为 $\odot O$ ， $P$ 是圆上的动点，求 $\sqrt{2}PA + PB$ 的最小值．

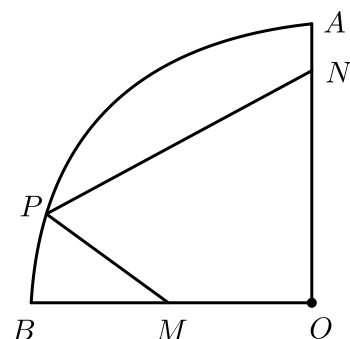


19. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 12$ ， $AC = 9$ ，以点 $C$ 为圆心，6为半径的圆上有一个动点 $D$ ．连接 $AD$ 、 $BD$ 、 $CD$ ，则 $2AD + 3BD$ 的最小值是 \_\_\_\_\_ ．

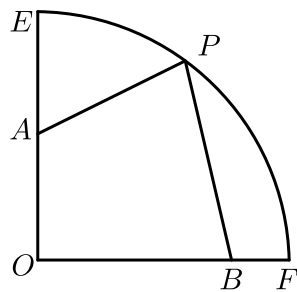


### 典题精练3

20. 在直角扇形 $OAB$ 中， $OB = 6$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $M$ 为 $OB$ 中点， $ON = 5$ ， $N$ 在 $OA$ 上， $P$ 点是弧 $AB$ 上一动点，则 $2PM + PN$ 的最小值为 \_\_\_\_\_ ．

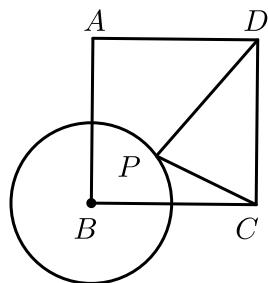


21. 如图，四分之一圆上一点 $P$ ， $OA = EA = 3$ ， $OB = 5$ ， $BF = 1$ ，求 $PA + \frac{1}{2}PB$ 的最小值．



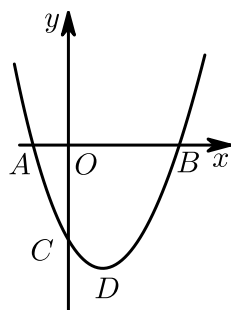
 典题精练4

22. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为4， $\odot B$ 的半径为2， $P$ 为 $\odot B$ 上的动点，求 $\sqrt{2}PC - PD$ 的最大值．



 过关斩将

23. 如图，已知：抛物线  $y = x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$  两点，与  $y$  轴交于点  $C$ ，点  $D$  为顶点。



(1) 求抛物线解析式及点  $D$  的坐标。

(2) 如图2， $E$  为  $OB$  的中点，将线段  $OE$  绕点  $O$  顺时针旋转得到  $OE'$ ，旋转角为  $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ ，连接  $E'B$ 、 $E'C$ ，当  $E'B + \frac{1}{2}E'C$  取得最小值时，求直线  $BE'$  与抛物线的交点坐标。

